Ejercicio 01

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x^2-2}\right)^x$$

Resolución algebraica detallada:
Primero, observamos que cuando $x \to \infty$, tanto el numerador como el denominador tienden a infinito:

$$\frac{x^2}{x^2-2} \to 1^+ \quad (\text{ya que } x^2-2 < x^2)$$

Así, la expresión toma la forma:

$$(1+\epsilon)^x \quad \text{con } \epsilon \to 0^+$$

Esta es una forma indeterminada del tipo 1^∞, por lo que aplicamos logaritmos para resolverla:

Sea:

$$y = \left(\frac{x^2}{x^2-2}\right)^x$$

Tomamos logaritmo natural a ambos lados:

$$\ln y = x \cdot \ln\left(\frac{x^2}{x^2-2}\right)$$

Escribimos la fracción como:

$$\frac{x^2}{x^2-2} = \frac{1}{1-\frac{2}{x^2}}$$

Entonces:

$$\ln y = x \cdot \ln\left(\frac{1}{1-\frac{2}{x^2}}\right) = x \cdot \left[-\ln\left(1-\frac{2}{x^2}\right)\right] = -x \cdot \ln\left(1-\frac{2}{x^2}\right)$$

Ahora, usamos el desarrollo de Taylor del logaritmo natural para $\ln(1-z)$ con $z \to 0$:

$$\ln(1-z) \approx -z \quad \text{cuando } z \to 0$$

En nuestro caso:

$$z = \frac{2}{x^2} \Rightarrow \ln\left(1-\frac{2}{x^2}\right) \approx -\frac{2}{x^2}$$

Entonces:

$$\ln y \approx -x \cdot \left(-\frac{2}{x^2}\right) = \frac{2}{x}$$

Finalmente, tomamos el exponente de ambos lados:

$$\ln y \to 0 \Rightarrow y \to e^0 = 1$$

Conclusión:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x^2-2}\right)^x = 1$$

Ejercicio 02

Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x+1}{x-3}$$

Paso 1: Evaluación directa

Sustituimos $x = 3$ directamente en la expresión:

$$\frac{3+1}{3-3} = \frac{4}{0}$$

Obtenemos una forma indeterminada del tipo $\frac{a}{0}$, lo que indica que el límite no existe en el sentido convencional. Procedemos a analizar los límites laterales.

Paso 2: Análisis de límites laterales

- **Límite por la derecha** ($x \to 3^+$):

  Cuando x se aproxima a 3 por valores mayores (ej: 3.1, 3.01, 3.001):

$$\frac{x+1}{x-3} \to \frac{4}{0^+} = +\infty$$

- **Límite por la izquierda** ($x \to 3^-$):

  Cuando x se aproxima a 3 por valores menores (ej: 2.9, 2.99, 2.999):

$$\frac{x+1}{x-3} \to \frac{4}{0^-} = -\infty$$

Paso 3: Conclusión

Como los límites laterales no coinciden (uno tiende a $+\infty$ y el otro a $-\infty$), concluimos que:

$$\boxed{\lim_{x\to 3} \frac{x+1}{x-3} \text{ no existe.}}$$

Ejercicio 03:

Dada la función:

$$g(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & \text{si } x < 0; \\ \frac{x-2}{2} & \text{si } x \geq 0; \end{cases}$$

Paso 1: Evaluar $g(0)$

$$g(0) = \frac{0-2}{2} = -1$$

Paso 2: Calcular límites laterales

- **Límite por la izquierda ($x \to 0^-$):**

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = 2(0)^2 - 1 = -1$$

- **Límite por la derecha ($x \to 0^+$):**

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \frac{0-2}{2} = -1$$

Paso 3: Conclusión

Como:

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^+} g(x) = g(0) = -1,$$

la función $g(x)$ es **continua** en $x_0 = 0$. No existe discontinuidad.

$\boxed{\text{La función } g(x) \text{ es continua en } x_0 = 0.}$

Ejercicio 04

Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} kx - 3, & \text{si } x \leq -1; \\ x^2 + k, & \text{si } x > -1, \end{cases}$$

Paso 1: Condición para la existencia del límite

Para que $\lim_{x\to -1} f(x)$ exista, los límites laterales deben ser iguales:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x).$$

Paso 2: Cálculo de los límites laterales

- **Límite por la izquierda ($x \to -1^-$):**

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = k(-1) - 3 = -k - 3$$

- **Límite por la derecha ($x \to -1^+$):**

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = (-1)^2 + k = 1 + k$$

Paso 3: Igualar y resolver para k

$$\begin{aligned} -k - 3 &= 1 + k \\ -4 &= 2k \\ k &= -2 \end{aligned}$$

Paso 4: Verificación

Sustituyendo $k = -2$:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = -1, \quad \lim_{x\to -1^+} f(x) = -1.$$

Los límites coinciden, por lo que la solución es correcta.

$\boxed{k = -2}$

Solución 05:

Parte (a): $\lim_{x\to 0} f(x)$

La función en $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} 2 + x, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

Límites laterales:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 2, \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0.$$

Como $2 \neq 0$, $\boxed{\text{El límite no existe.}}$

Parte (b): $\lim_{x\to 1} f(x)$

La función en $x = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x < 1 \\ 2 - x, & x \ge 1 \end{cases}$$

Límites laterales:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1, \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = 1.$$

Como coinciden, $\boxed{\lim_{x\to 1} f(x) = 1}$.

Ejercicio 06

Calcular:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^{1/x}$$

Paso 1: Forma indeterminada

Cuando $x \to +\infty$:

$$\frac{x}{x+1} \to 1 \quad \text{y} \quad \frac{1}{x} \to 0,$$

resultando en 1^∞ (indeterminado).

Paso 2: Aplicar logaritmo

Sea L el límite:

$$\ln L = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)}{x} = 0,$$

pues el numerador $\to 0$ y el denominador $\to +\infty$.

Paso 3: Solución

$$L = e^0 = \boxed{1}.$$

Ejercicio 07

Método 1: Racionalización

1. **Identificar la forma indeterminada:**

$$\text{Al sustituir } x = 3 : \frac{0}{0} \text{ (indeterminado)}$$

2. **Aplicar la identidad algebraica:**

$$a - b = (\sqrt[5]{a} - \sqrt[5]{b})(\sqrt[5]{a^4} + \sqrt[5]{a^3 b} + \sqrt[5]{a^2 b^2} + \sqrt[5]{a b^3} + \sqrt[5]{b^4})$$

3. **Factorizar el numerador:**

$$x - 3 = (\sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{3})(\sqrt[5]{x^4} + \sqrt[5]{x^3 \cdot 3} + \sqrt[5]{x^2 \cdot 3^2} + \sqrt[5]{x \cdot 3^3} + \sqrt[5]{3^4})$$

4. **Simplificar la expresión:**

$$\frac{x-3}{\sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{3}} = \sqrt[5]{x^4} + \sqrt[5]{3x^3} + \sqrt[5]{9x^2} + \sqrt[5]{27x} + \sqrt[5]{81}$$

5. **Evaluar el límite:**

$$\lim_{x\to 3}[\cdots] = 5 \cdot \sqrt[5]{81} = \boxed{5 \cdot 3^{4/5}}$$

Método 2: Cambio de variable

1. **Hacer el cambio:**

$$t = \sqrt[5]{x} \Rightarrow x = t^5 \quad \text{y cuando } x \to 3, t \to \sqrt[5]{3}$$

2. **Reescribir el límite:**

$$\lim_{t\to \sqrt[5]{3}} \frac{t^5 - 3}{t - \sqrt[5]{3}}$$

3. **Factorizar usando diferencia de quintas potencias:**

$$t^5 - 3 = (t - \sqrt[5]{3})(t^4 + t^3\sqrt[5]{3} + t^2(\sqrt[5]{3})^2 + t(\sqrt[5]{3})^3 + (\sqrt[5]{3})^4)$$

4. **Simplificar y evaluar:**

$$\lim_{t\to \sqrt[5]{3}} \left[t^4 + t^3\sqrt[5]{3} + t^2(\sqrt[5]{3})^2 + t(\sqrt[5]{3})^3 + (\sqrt[5]{3})^4\right] = 5 \cdot (\sqrt[5]{3})^4 = \boxed{5 \cdot 3^{4/5}}$$

Conclusión

Ambos métodos llevan al mismo resultado:

$$\boxed{5 \cdot \sqrt[5]{81}} \quad \text{o equivalentemente} \quad \boxed{5 \cdot 3^{4/5}}$$

article amsmath amssymb

Ejercicio 08: Continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} 5x + 9, & \text{si } x \leq -3 \\ \frac{x-3}{(-1)^x}, & \text{si } x > -3 \end{cases}$$

Análisis en el punto crítico $x = -3$

1. **Valor de la función:**

$$f(-3) = 5(-3) + 9 = -15 + 9 = -6$$

2. **Límite por la izquierda:**

$$\lim_{x\to -3^-} f(x) = 5(-3) + 9 = -6$$

3. **Límite por la derecha:** Para $x > -3$, debemos analizar dos casos:

   - Si x es entero: $(-1)^x$ oscila entre -1 y 1
   - Si x no es entero: $(-1)^x$ no está definido

   Como el denominador no está definido para valores no enteros y oscila para valores enteros, el límite por la derecha **no existe**.

4. **Conclusión:** La función es **discontinua** en $x = -3$ porque no existe el límite por la derecha.

Análisis para $x > -3$

La función presenta discontinuidades en todos los puntos $x > -3$ donde:

- x es entero par: $(-1)^x = 1$
- x es entero impar: $(-1)^x = -1$
- x no es entero: la función no está definida

La función es discontinua en $x = -3$ y en todos los $x > -3$ no enteros.

Ejercicio 09: Puntos de discontinuidad

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{si } x \leq 1 \\ x - 1, & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ 4, & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Análisis en $x = 1$

1. **Valor de la función:**
$$f(1) = 1^2 - 1 = 0$$
2. **Límite por la izquierda:**
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1^2 - 1 = 0$$
3. **Límite por la derecha:**
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1 - 1 = 0$$
4. **Conclusión:** La función es **continua** en $x = 1$ porque $f(1) = \lim_{x \to 1} f(x)$.

Análisis en $x = 3$

1. **Valor de la función:**
$$f(3) = 3 - 1 = 2$$
2. **Límite por la izquierda:**
$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = 3 - 1 = 2$$
3. **Límite por la derecha:**
$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = 4$$
4. **Conclusión:** Existe discontinuidad en $x = 3$ porque $\lim_{x \to 3^-} f(x) \neq \lim_{x \to 3^+} f(x)$.
   Tipo de discontinuidad: Discontinuidad de salto finito.

La función tiene una discontinuidad de salto en $x = 3$.